

---

BJEST(CONSTANT, CUMPLOT, EXACTML, NAR= AR モデルの次数,  
 NBACK= 後向き予測時の残差の数, NDIFF= 階差の次数,  
 NLAG= 自己相関係数の次数, NMA= MA モデルの次数,  
 NSAR= 季節 AR モデルの次数, NSDIFF= 季節階差の次数, NSMA= 季節 MA モデルの次数,  
 NSPAN= 季節の周期, PLOT, RELAX, ROOTS, START, 非線形オプション)  
 系列名 [ START パラメータ名 初期値 ... ]  
 or [ FIX パラメータ名 初期値 ... ]  
 or [ ZERO パラメータ名 ] or [ ZFIX パラメータ名 ] ;

---

### 機能 :

BJEST は, ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) 単変量時系列モデルのパラメータを, 条件付最尤法あるいは厳密最尤法により推定します. この方法の技術的な詳細は, 参考文献の Box-Jenkins(1976) 第7章を参照してください. TSP の時系列モデルの記述は Box-Jenkins と同じです.

### 使用法:

ARIMA モデルを推定するために, BJEST コマンドの後の括弧の中で必要なオプションを指定し, ついで分析対象となる系列名と, 既定の初期値を書き換える必要があればパラメータの初期値を指定します.

推定されるモデルは, 一般的に次のように書くことができます.

$$\Gamma(B)\phi(B)w_t = \Delta(B)\theta(B)a_t + \text{定数項}$$

$w_t$  は, 通常のあるいは季節階差をとった後の入力データ,  $a_t$  はホワイトノイズです. また,  $B$  は「バックシフト」あるいは「ラグオペレータ」と呼ばれるもので, 次式を表します.

$$Bw_t = w_{t-1} \quad [= Lw_t]$$

ここで,  $\Gamma(B)$ ,  $\Phi(B)$ ,  $\Delta(B)$  と  $\Theta(B)$  は, すべて  $B$  についての多項式です. NSAR, NAR, NSMA と NMA はその次数を指定します.  $\Gamma(B)$  と  $\Delta(B)$  は, 季節 AR および季節 MA の多項式で,  $\phi(B)$  と  $\theta(B)$  は, 通常の AR および MA の多項式です. すべての多項式は次の形になります.

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots$$

ここで, すべてのパラメータは, その前にマイナスの符号を付けたものであることに注意してください.

BJEST コマンドは, 最尤法を用いて, 本来観測できない  $a_t$  が互いに独立で同じ分散となるように, 上記の多項式のパラメータを推定します. オプションは, 推定されるモデルを特定化したり, イタレーション過程を制御するために用います.

TSP の他のイタレーションによる推定方法と同じように, パラメータに適切な初期値を与えるほうがよい場合があります. ただ他の場合と異なり, 初期値を PARAM コマンドではなく, BJEST コマンドの中で直接与えます. これはパラメータが Box-Jenkins の特有の名称を持つからです.

BJEST のなかで初期値を与える方法はいくつかあります. 最も簡単な方法は, 適切な初期値を TSP に推測させることです. この場合, TSP は非季節パラメータについては自己相関係数に基づいて決めます. この機

能を止めるためにはNOSTART オプションを用います。もし他の情報が与えられなければ、TSPはすべてのパラメータの初期値をゼロとします。このようにすると収束が一般的に遅くなります。

初期値はユーザー自身が与えることもできます。複数のパラメータを持つ場合、個々のパラメータを簡単に解釈することができず、初期値を与えることが難しいかもしれません。しかしながら、すくなくとも特定のパラメータについてはそれ以前の推定値を使いたいことがあります。この場合、初期値を与えないパラメータについては、(既定値である)START オプションが指定されればTSPが適当に推測し、NOSTART オプションが指定されればゼロが初期値として用いられます。

ユーザーが与える初期値は、系列名の後で指定します。キーワードとしてSTARTを指定し、パラメータ名と初期値を与えます。パラメータ名は次のようにつけます。

|                        |          |
|------------------------|----------|
| AR(lag) or PHI(lag)    | AR 係数    |
| MA(lag) or THETA(lag)  | MA 係数    |
| SAR(lag) or GAMMA(lag) | 季節 AR 係数 |
| SMA(lag) or DELTA(lag) | 季節 MA 係数 |

括弧の中のlagは、ラグ多項式のパラメータの位置を示す実数です。例えば、AR(1)は1期ラグのパラメータです。なお、AR(0)は常に1です。

ところで、パラメータをある特定の値に固定することが有用な場合があります。この方法は、推定するパラメータの数を制限したり、パラメータに関する事前情報を組み入れたり、特定のパラメータを別に求めたりするのに用います。これはキーワードのFIXの後にパラメータ名と値を組み合わせで指定します。さらに、おなじBJEST コマンドの中に、あるパラメータには初期値を与え、他のパラメータはそのままにしておくためにFIXとSTART オプションを併置することができます。ZEROというキーワードは、いくつかのパラメータに自動的にゼロの初期値を与えます。ZFIXのキーワードは、いくつかのパラメータをゼロにします。

BJESTは、推定を行わずに、定常性/反転可能性に対する多項式の根をチェックするのに用いることもできます。@STARTに係数値を与えて、NAR=p あるいは NMA=q あるいは両方を用いて、従属変数を与えません。PRINT オプションで根をプリントするか、あるいは@ARSTARTと@MASTART変数を使うことができます。

### オプション:

CONSTANT/NOCONSは、モデルに定数項を含めるかどうかを指示します。既定値は、NOCONSです。

CUMPLOT/NOCUMPLOは、残差の累積ペリオドグラムを出力するかどうかを指示します。このグラフを出力するために、標本数の2乗の領域を必要とします。したがって、標本数が多い場合には、NOCUMPLO オプションを指定した方がよいと思います。既定値はCUMPLOTです。

EXACTML/NOEXACTは、(条件付きに対して)厳密最尤推定を行うことを指定します。EXACTMLは、MA 多項式に単位根があるモデルに対して推奨します。このオプションは常にAR 多項式に定常性を、そしてMA 多項式に反転条件を課します。

NAR=は、ARモデルの次数を設定します。既定値\*は0です。

NBACK=は、後向きに予測する残差の数を設定します。既定値\*は100です。

NDIFF=は、時系列の階差をとる次数を設定します。既定値\*は0です。

NLAG=は、計算する自己相関/Q統計量の数。既定値\*は20です。

NMA=は、MAモデルの次数を設定します。既定値\*は0です。

## BJEST

NSAR=は、季節ARモデルの次数を設定します。既定値\*は0です。

NSDIF=は、時系列の季節階差をとる次数を設定します。既定値\*は0です。

NSMA=は、季節MAモデルの次数を設定します。既定値\*は0です。

NSPAN=は、季節性周期の期間の指定をします。例えば、四半期データであればNSPAN=4となります。既定値はSMPLコマンドで指定されている周期(年では1, 四半期では4, 月次では12)が用いられます。

PLOT/NO PLOTは、残差のグラフを出力するかどうかを指示します。既定値はPLOTです。

RELAX/NORELAXは、ラグ多項式に対する定常性と反転性の制約を緩めます。これは EXACTML と共に使うことはできません。

ROOTS/NOROOTsは、多項式の根を、PRINTによる他のアウトプットとは別にプリントします。

START/NOSTARTは、パラメーターの初期値を自動的に設定するか (START), 外部から与えるか (NOSTART) を指示します。既定値はSTARTです。

**非線形オプション** イタレーションとプリントをコントロールします。このマニュアルの NONLINEAR の節で説明されています。

\* すべての Box-Jenkins コマンド (BJIDENT, BJEST と BJFRCST) では、TSP はそれ以前の Box-Jenkins コマンドで用いられたオプション (非線形オプションは除く) はそのまま記憶します。したがって、指定するオプションは新たに変更するものだけです。

### 例:

この例では、ARMA(1,1) を季節要素なしで推定する例で、グラフは出力されません。

```
BJEST (NAR=1,NMA=1,NO PLOT,NOCUM PLO) AR9MA5 ;
```

次の例は、参考文献の Nelson の教科書 (1973) にある自動車販売データを用いて推定する例です。データは対数変換されたものが使用されます。

```
GENR LOGAUTO = LOG(AUTOSALE);  
BJEST (STEP=CEAB,NDIF=1,NSDIF=1,NMA=2,NSMA=1,NSPAN=12,NBACK=15) LOGAUTO  
START THETA(1) 0.12 THETA(2) 0.20 DELTA(1) 0.82 ;
```

ここで、NBACK=15 となっていることに注意してください。これは後向きの残差予測が、このモデルの場合、純粹の MA モデルで NSPAN+NSMA+NMA 期以上離れた残差は正確にゼロとなることから決まります。

最後の例は、3 次の AR モデルを 1 つのパラメータを固定して推定する例です。

```
BJEST GNP START PHI(2) -0.5 PHI(3) 0.1 FIX PHI(1) 0.9 ;
```

推定されるモデルは

$$GNP_t - 0.9 * GNP_{t-1} - \phi_2 * GNP_{t-2} - \phi_3 * GNP_{t-3} = a_t$$

です。厳密最尤推定は次のようにします。

```
MMAKE @START .1 .1 .1;  
BJEST(NAR=2,NMA=1,NDIFF=1,EXACTML) Y ;
```

**アウトプット:**

BJESTは、まずパラメータの初期値を出力し、つづいて目的関数の値と収束基準を与えたイタレーション毎に1行のイタレーション・ログが出力されます。PRINT オプションが指定されると、用いたオプションの変換値と厳密な時系列プロセスがプリントされます。PRINTがオンなら、イタレーション・ログには、パラメータの値と変化がイタレーション毎にプリントされます。

イタレーションが収束したり、イタレーションの最大数になったとき、そのメッセージが出力され、最終結果が表示されます。この中にはモデルの伝統的な統計量である、 $a_t$  の標準誤差、 $R^2$  やすべてのパラメータがゼロであるという仮説に関する  $F$  統計量などが含まれます。さらに、パラメータの推定値と標準誤差が通常の回帰のアウトプットとして出力されます。

もしどれかの多項式の次数が1を越える場合は、固有根が単位円の外側にあるかどうか(定常かどうか)をチェックするために出力されます。このあとで、残差についての自己相関係数の表やLjung and Box の  $Q$  統計量が出力されます。PLOT オプションが指定されていると、推定された厳密なモデルが再びラグの記号で、残差の要約統計量と共にプリントされます。次に、階差系列  $w_t$  とホワイトノイズ(残差)系列  $a_t$  との間のラグ付クロス相関がプリントされます。

PLOT オプションが指定されると、残差  $a_t$  の時系列プロットが出力されます。もし CUMPLOT オプションが指定されると、標準化された累積ペリオドグラムもプロットされます(上の CUMPLOT オプションを参照)。

次の変数が保存されます(階差オプションが指定されていると、階差データについての統計量となります)。

| 名前      | タイプ  | 長さ        | 変数の内容                       |
|---------|------|-----------|-----------------------------|
| @LHV    | リスト  | 1         | 従属変数名                       |
| @RNMS   | リスト  | 方程式数      | 右辺の変数名                      |
| @SSR    | スカラー | 1         | 残差平方和                       |
| @S      | スカラー | 1         | 方程式の標準誤差                    |
| @S2     | スカラー | 1         | 2乗した標準誤差                    |
| @YMEAN  | スカラー | 1         | 従属変数の平均                     |
| @SDEV   | スカラー | 1         | 従属変数の標準偏差                   |
| @DW     | スカラー | 1         | ダービン・ワトソン比                  |
| @RSQ    | スカラー | 1         | 決定係数 ( $R^2$ )              |
| @ARSQ   | スカラー | 1         | 自由度修正済み決定係数 ( $\bar{R}^2$ ) |
| @IFCONV | スカラー | 1         | 収束したら1                      |
| @LOGL   | スカラー | 1         | 対数尤度関数                      |
| @NCOEF  | スカラー | 1         | 係数の数                        |
| @NCID   | スカラー | 1         | 識別された係数の数                   |
| @COEF   | ベクトル | 方程式数      | 計算されたパラメータの値                |
| @SES    | ベクトル | 方程式数      | 計算されたパラメータの標準偏差             |
| @T      | ベクトル | 方程式数      | 係数の $t$ 統計値                 |
| @GRAD   | ベクトル | 方程式数      | 収束時における勾配の値                 |
| @VCOV   | 行列   | 方程式数*方程式数 | 計算されたパラメータの共分散行列            |
| @QSTAT  | ベクトル | ラグの数      | Ljung-Box 修正 $Q$ 統計         |
| %QSTAT  | ベクトル | ラグの数      | $Q$ 統計に対する $P$ 値            |
| @ARSTAT | スカラー | 1         | AR 多項式が定常なら1                |
| @MAINV  | スカラー | 1         | MA 多項式が反転可能なら1              |
| @FIT    | 系列   | 観測値数      | 従属変数の予測値                    |
| @RES    | 系列   | 観測値数      | 残差=従属変数の予測値-実績値             |

**方法:**

BJEST コマンドで使用されている方法(デフォルトは NOEXACTML)は, 基本的に Box-Jenkins が彼らの本で記述している方法でパラメータを推定しています. この方法は, 数値微分を用いた伝統的な非線形最小二乗法アルゴリズムを用いています. 時系列の推定方法と伝統的な非線形最小二乗法との違いは, 「後向きに予測された残差」の扱いにあります. ARIMA モデルの尤度関数は無限の過去の残差に依存します. もし時系列モデルをこれらの過去の値をゼロとおいて推定する(その無条件期待値)と, もし初期攪乱項  $a_0$  が値がたまたまゼロから大きく乖離していると, パラメータの推定を誤ってしまう可能性があります.

Box-Jenkins は, この問題を解決するために時系列を逆転して, 将来の値が過去の値を決めるような表現を用いることを提案しました. これは時系列が事後的に表現する関係を表わしています. この後向きの表現は, 攪乱項である  $a_t$  を後向きに予測して, 尤度関数で用いられる残差を計算します. これらの適当な数の後ろ向き残差を用いることにより, 時系列の最初の攪乱項が異常な高い正の値や負の値を示すことによる問題点を除去することができます. 上で述べた方法は**無条件 SSR 法**として知られており, TSP 4.2 以前で使われていました. TSP 4.3 では, BJEST は尤度関数の後ろ向き残差の平方和を考慮しない**条件付き SSR 法**の使用に変更しました. TSP 4.4 では**無条件 SSR 法**より優れている EXACTML 法が利用できるようになりました.

もし時系列が純粋な MA モデルに従うとすれば, 過去の特定の時点以降のこの残差はゼロとなります. そのため, この場合は NBACK をかなり小さく設定することができます.

EXACTML オプションを用いたときは, 後ろ向き予測は行いません. この場合 AS 197 アルゴリズム (Mélard 1984) を用います.

**参考文献:**

Box, George P. and Gwilym M. Jenkins, **Time Series Analysis: Forecasting and Control**, Holden-Day, New York, 1976.

Ljung, G.M. and Box, George P., “On a measure of lack of fit in time series models,” **Biometrika**, 66, 1978, pp. 297-303.

Mélard, G., “Algorithm AS 197: A Fast Algorithm for the Exact Likelihood of Autoregressive-moving Average Models,” **Applied Statistics**, 1984, p.104–109, (code posted on StatLib, with corrections)

Nelson, Charles, **Applied Time series Analysis for Managerial Forecasting**, Holden-Day, New York, 1973.

Pindyck, Robert S. and Daniel L. Rubinfeld, **Econometric Models and Economic Forecasts**, McGraw-Hill Book Co, New York, 1976, Chapter 15.

Statlib, <http://lib.stat.cmu.edu/apstat/>